

## Fiche d'électromagnétisme

### 1 Champ et potentiel électrostatiques

La circulation du champ  $\vec{A}(M)$  sur une courbe ( $C$ ) est donnée par :

$$\mathcal{C} = \int_{(C)} \vec{A}(M) d\vec{M}$$

Le flux du champ  $\vec{A}(M)$  à travers une surface orientée ( $S$ ) est donnée par :

$$\Phi = \iint_{(S)} \vec{A}(M) d\vec{S}$$

Si le champ  $\vec{A}(M)$  est à circulation conservative, il dérive du potentiel scalaire  $V$  :

$$\vec{A} = -\overrightarrow{grad}(V)$$

Expressions du gradient en coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{grad}(V) = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$$

Loi de Coulomb pour l'interaction électrostatique entre deux charges ponctuelles :

$$\overrightarrow{f_{1 \rightarrow 2}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

$$\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \approx 9.10^9 \text{ S.I.} \quad \epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$$

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \quad V = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r}$$

Théorème de Gauss : le flux du champ électrique sortant d'une surface fermée ( $S$ ) vaut :

$$\Phi = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Symétries du champ et du potentiel électrostatique :

En tout point d'un plan de symétrie, le champ électrostatique est contenu dans ce plan.

En tout point d'un plan d'antisymétrie, le champ électrostatique est perpendiculaire à ce plan.

En tout point d'un axe de révolution, le champ électrostatique appartient à cet axe.

Les lignes de champ sont des courbes de l'espace telles que le vecteur champ y soit en tout point tangent.

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$$

Les surfaces équipotentielles sont l'ensemble des points  $M$  tels que  $V(M) = cste$

Les lignes de champ sont orthogonales aux équipotentielles.

Le champ est dirigé dans le sens des potentiels décroissants.

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad \text{donne} \quad E_p = qV$$

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i$$

Potentiel d'un plan infini :  $E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$

## 2 Formulation locale des lois de l'électrostatique

Théorème d'Ostrogradski :

$$\iint_{(S)} \vec{A} d\vec{S} = \iiint_{(V)} \text{div}(\vec{A}) d\tau$$

$$\text{div}(\vec{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\Delta V = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(V)) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Equation de Maxwell-Gauss :

$$\operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Equation de Poisson :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

Théorème de Stokes :

$$\oint_{(C)} \vec{A} d\vec{l} = \iint_{(S)} \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{A}) d\vec{S}$$

Expression du rotationnel :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

Principales formules d'analyse vectorielle :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}(V)) &= \Delta V & \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{A})) &= \vec{0} & \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}(V)) &= \vec{0} \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{A})) &= \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div}(\vec{A})) - \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}(A)) \end{aligned}$$

### 3 Electrostatique des conducteurs

Théorème de Coulomb :

$$\vec{E}_{ext} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$

Pression électrostatique :

$$P_e = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \quad d\vec{f} = P_e d\vec{S}$$

Capacité d'un conducteur unique :  $Q = CV$

Capacité d'un condensateur :  $Q = C(V_1 - V_2)$

Association de condensateurs :

- en parallèle :  $C = \sum C_i$  - en série :  $\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i}$

Energie électrostatique pour des conducteurs :

$$U_e = \sum V_i \cdot dQ_i - \delta W_{Coulomb}$$

## 4 La conduction électrique

La densité volumique de courant est donnée par :

$$\vec{j} = nq\vec{v} \quad di = \vec{j}d\vec{S}$$

La densité de courant surfacique est donnée par :

$$\vec{j}_s = \sigma_m\vec{v} \quad di = \vec{j}_s \cdot \vec{n}dl$$

Equation locale de la conservation de la charge :

$$\text{div}(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Loi d'Ohm locale :

$$\vec{j} = \sigma\vec{E}$$

Pour les métaux on retiendra que :  $\sigma \approx 10^7 \text{ S.m}^{-1}$  On utilise aussi la résistivité électrique (différent de la charge volumique) :

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

Loi d'Ohm intégrale :

$$V_1 - V_2 = RI$$

Résistance d'un conducteur cylindrique :

$$R = \frac{l}{\sigma S} = \frac{\rho l}{S}$$

Pour un condensateur plan, on retiendra que :

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{e} \quad R = \frac{e}{\sigma S} \quad RC = \frac{\epsilon_0}{\sigma}$$

## 5 Propriétés du champ magnétostatique

$$\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$\iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) \quad \Leftrightarrow \quad \text{div}(\vec{B}) = 0$$

Théorème d'Ampère :

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{int}}$$

Forme locale du théorème d'Ampère :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$$

Equation de poisson de la magnétostatique :

$$\vec{\Delta}(\vec{A}) + \mu_0 \vec{j} = \vec{0}$$

Loi de Biot et Savart :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{C} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

Expression du potentiel :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j} \cdot d\tau}{r}$$

Force de Lorentz :

$$\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

En tout point d'un plan de symétrie, le champ magnétostatique est perpendiculaire au plan, et le potentiel vecteur est parallèle au plan.

En tout point d'un plan d'antisymétrie, le champ magnétostatique est parallèle au plan, et le potentiel vecteur est perpendiculaire au plan.

## 6 Calcul de champs magnétostatiques

Pour un fil infini :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

Pour un solénoïde infini :

$$\vec{B}_{int} = \mu_0 n I \vec{u}_z \quad \vec{B}_{ext} = \vec{0}$$

## 7 Les forces de Laplace

$$d\vec{f} = d\vec{C} \wedge \vec{B}$$

Si le courant est constant et que le champ magnétostatique est permanent :

$$W = I(\Phi_2 - \Phi_1) \quad Ep = -I\Phi$$

## 8 Magnétostatique pour les circuits filiformes

Expressions de l'énergie magnétique :

$$U_m = \frac{1}{2} \sum i_j \Phi_j$$

$$U_m = \iiint \frac{B^2 d\tau}{2\mu_0}$$

$$U_m = \iiint \frac{\vec{j} \cdot \vec{A} d\tau}{2}$$

Bilans énergétiques :

$$dU_m = \sum i_j d\Phi_j - \delta W_{Laplace}$$