Espaces hermitiens

Il est nécessaire de lire la fiche sur les espaces préhilbertiens réels au préalable

1 Strucuture d'hespace préhilbertien complexe

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Une application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$ sesquilinéaires, hermitienne, définie positive est un produit scalaire complexe sur E.
Un produit scalaire complexe φ est donc une application de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$ qui vérifie les propriétés suivantes :
- $\forall (x,y) \in E^2, \qquad \varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)}$
- $\forall (x,y_1,y_2) \in E^3, \quad \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2, \quad \varphi(x,\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda\varphi(x,y_1) + \mu\varphi(x,y_2)$
- $\forall x \in E, \quad \varphi(x,x) \leq 0$
- $\forall x \in E, \quad \varphi(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Un espace vectoriel complexe muni d'un produit scalaire est appelé espace préhilbertien complexe. Une application de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$, hermitienne et linéaire par rapport à la seconde variable possède la propriété suivante :

$$\forall (x_1,x_2,y) \in E^3, \quad \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2, \quad \varphi(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \overline{\lambda}\varphi(x_1,y) + \overline{\mu}\varphi(x_2,y)$$

Elle est dite semi-linéaire à gauche ou par rapport à la première variable.
Semi-linéaire par rapport à la première variable, linéaire par rapport à la seconde, elle est qualifiée de sesquilinéaire.

Un espace préhilbertien complexe de dimension finie est appelé espace hermitien.

Théorème : inégalité de Cauchy-Schwarz
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire φ, alors :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad |\varphi(x,y)|^2 \leq \varphi(x,x)\varphi(y,y)$$

L'égalité a lieu si et seulement si (x,y) est liée.

Théorème : inégalité de Minkowski
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire φ, alors :

$$\forall (x,y) \in E^2 \qquad \sqrt{\varphi(x+y,x+y)} \leq \sqrt{\varphi(x,x)} + \sqrt{\varphi(y,y)}$$

L'égalité a lieu si et seulement si la famille (x,y) est positivement liée.

Théorème :
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire φ. Alors la fonction $|| \; ||$ de E dans $\mathbb{R}^+$, définie par $||x|| = \sqrt{\varphi(x,x)}$, est une norme sur E, dite norme associée au produit scalaire complexe ou norme hermitienne.

L'espace E est ainsi muni d'une structure d'espace vectoriel normé.
Lorsqu'il est complet, on l'appelle espace de Hilbert.

Formules :

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + 2Re(x|y)$$
$$||x-y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 - 2Re(x|y)$$
$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$$
$$||x+y||^2 - ||x-y||^2 = 4Re(x|y)$$
$$(x|y) = \frac{1}{4}(||y+x||^2 - ||y-x||^2 + i||y+ix||^2 - i||y-ix||^2)$$
$$||x|| = sup\{|(x|y)|; ||y|| \leq 1\} = sup\{|(x|y)|; ||y|| = 1\} = sup\{\frac{|(x|y)|}{||y||}; y \neq 0_E\}$$

Soient (E_1, φ_1) et (E_2, φ_2) deux espaces préhilbertiens complexes.
On appelle isomorphisme d'espaces préhilbertiens complexes tout isomorphisme d'espaces vectoriels f de E_1 sur E_2 qui respecte le produit scalaire :

$$\forall (x,y) \in E_1^2 \qquad \varphi_2(f(x), f(y)) = \varphi_1(x,y)$$

Un isomorphisme d'espaces préhilbertiens complexes de E sur lui-même est appelé autmorphisme unitaire.

Théorème :
Soient (E_1, φ_1) et (E_2, φ_2) deux espaces préhilbertiens complexes, N_1 et N_2 les normes associées.
Une application linéaire f de E_1 dans E_2 surjective est un isomorphisme d'espaces préhilbertiens complexes si et seulement si elle est isométrique c'est-à-dire si et seulement si elle respecte les normes :

$$\forall x \in E_1 \qquad N_2(f(x)) = N_1(x)$$

2 Orthogonalité

Théorème de Pythagore :
Soit (E,(|)) un espace préhilbertien complexe et || || sa norme associée.

$$\forall (x,y) \in E^2 \qquad x \perp y \Rightarrow ||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$$

$$\forall (x,y) \in E^2 \qquad ||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 \Leftrightarrow (x|y) \in i\mathbb{R}$$

Théorème :
Soit (E,(|)) un espace préhilbertien complexe. Soit $(F_i)_{i\in[1,n]}$ une famille de n sous-espaces vectoriels de E en somme directe orthogonale.
Pour tout $x = (x_1, ..., x_n)$ de $F_1 \times ... \times F_n$, on a :

$$||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} ||x_i||^2$$

Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E en somme directe orthogonale. Pour tout i de I, soit p_i la projection sur F_i de noyau $\bigoplus_{\substack{j\in I \\ j\neq i}} F_j$.
Comme pour toute somme directe, on a :

$$\sum_{i\in I} p_i = Id_E, \qquad p_i \circ p_i = p_i, \qquad p_i \circ p_{j\neq i} = 0$$

Le projecteur p_i est un projecteur orthogonal, car $\bigoplus_{\substack{j\in I \\ j\neq i}} F_j$ est un supplémentaire orthogonal de F_i.
Les projecteurs p_i sont appelés les projecteurs orthogonaux associés à la décomposition de E en somme directe orthogonale.

Théorème : procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt
Soit (E,(|)) un espace préhilbertien complexe, p dans $\mathbb{N}^*$ et $(e_1, ..., e_p)$ une famille libre de E.
Il existe une et une seule famille $(\epsilon_1, ..., \epsilon_p)$ orthonormale de E telle que :

$$\forall k \in [1, p] \qquad Vect(e_1, ..., e_k) = Vect(\epsilon_1, ..., \epsilon_k) \qquad (\epsilon_k | e_k) \in \mathbb{R}_+^*$$

Pour un calcul manuel, il est plus simple de rechercher par récurrence une famille orthogonale en posant :

$$\forall k \in [1, p-1] \qquad \epsilon_{k+1} = \alpha_{k+1} e_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \epsilon_i$$

sans oublier de normaliser les vecteurs obtenus.

3 Espaces hermitiens

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension n et $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de E.
Notons X le vecteur colonne des coordonnées d'un vecteur x quelconque de E et Y celui d'un vecteur y quelconque de E.
A toute matrice M de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ de coefficient général $m_{i,j}$, on associe la matrice $\overline{M}$ de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ de coefficient général $\overline{m_{i,j}}$. Elle est dite matrice conjuguée de M.
Une forme sesquilinéaire (|) est entièrement déterminée par la matrice $A = (a_{i,j})_{i \in [1,n],\ j \in [1,n]}$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [1,n]^2, \qquad a_{i,j} = (e_i | e_j)$$

Alors :

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \overline{x_i} y_j =^t \overline{X} A Y$$

Pour toute matrice M, on définit la matrice $M^* =^t \overline{M}$ appelée matrice transconjuguée de M.
La forme sesquilinéaire (|) de matrice A dans la base B est hermitienne si et seulement si la matrice A vérifie A=A*. On dit alors que A est une matrice hermitienne.
Soit A une matrice hermitienne, elle est dite positive lorsque :

$$\forall X, \qquad {}^t\overline{X} A X \geq 0$$

Elle est dite définie positive lorsque :

$$\forall X, \qquad X \neq 0 \Rightarrow^t \overline{X} A X > 0$$

La forme sesquilinéaire (|), de matrice A dans la base B est un produit scalaire complexe si et seulement si la matrice A est hermitienne définie positive.
Si B' est une deuxième base de E et que l'on note P la matrice de passage de la base B à la base B' et A' la matrice de (|) dans la base B'.

$$A' =^t \overline{P} A P$$

Théorème :
Dans tout espace hermitien, il existe des bases orthonormales et le procédé de Gram-Schmidt permet d'en construire.

Théorème :
Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base orthonormale d'un espace vectoriel hermitien (E,(|)).
Alors :

$$\forall x \in E, \qquad x = \sum_{i=1}^{n} (e_i | x) e_i$$

Corollaire :
Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base orthonormale d'un espace vectoriel hermitien (E,(|)) et u un endomorphisme de E. Alors la trace de u est :

$$Tr(u) = \sum_{i=1}^{n} (e_i | u(e_i))$$

Le déterminant de u est $Det(u) = Det((e_i | u(e_j))_{i \in [1,n], j \in [1,n]})$

Corollaire :
Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base orthonormale d'un espace vectoriel hermitien (E,(|)).
Alors pour tous vecteurs $x = \sum x_i e_i$ et $y = \sum y_i e_i$ de E :

$$||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |(e_i|x)|^2}$$

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)(e_i|y)$$