

# Espaces préhilbertiens réels

## 1 Formes bilinéaires

**Définition : bilinéarité**

Une application  $\varphi$  de  $E \times E$  est dite bilinéaire sur  $E$  lorsque les applications de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  définies pour tout  $x$  et  $y$  dans  $E$  par  $g_x : y \mapsto \varphi(x, y)$  et  $d_y : x \mapsto \varphi(x, y)$  sont linéaires.

L'ensemble  $\mathcal{BL}(E)$  des formes bilinéaires de  $E$  est un sous-espace vectoriel du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathcal{F}(E \times E, \mathbb{R})$

**Définition : symétrie**

Une forme bilinéaire  $\varphi$  est symétrique lorsque :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$$

**Définition : forme quadratique**

Soit  $\varphi$  une forme bilinéaire sur  $E$ . L'application  $\phi$  définie de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  par  $\phi(x) = \varphi(x, x)$  est appelée forme quadratique associée à  $\varphi$

L'ensemble  $\mathcal{Q}(E)$  des formes quadratiques sur  $E$  est un sous-espace vectoriel du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $(\mathbb{R}^E, +, \cdot)$

**Théorème : identité de polarisation**

Soit  $\phi$  une forme quadratique sur  $E$ . Il existe une unique forme bilinéaire symétrique  $\varphi$  associée. On l'appelle forme polaire de  $\phi$ .

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \varphi(x, y) = \frac{1}{2}[\phi(x + y) - \phi(x) - \phi(y)]$$

**Formules :**

Soit  $\phi$  une forme quadratique sur  $E$ . Alors :

$$\forall x \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \phi(\lambda x) = \lambda^2 \phi(x)$$

$$\forall x \in E \quad \phi(-x) = \phi(x)$$

$$\phi(0_E) = 0$$

**Théorème : identité du parallélogramme**

Soit  $\phi$  une forme quadratique sur  $E$ . Alors :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \phi(x + y) + \phi(x - y) = 2(\phi(x) + \phi(y))$$

On suppose que  $E$  est de dimension finie  $n$ . Considérons une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$ . Pour tous vecteurs  $x$  et  $y$  de  $E$ , notons :

$$x = \sum_{k=1}^n x_k e_k \quad y = \sum_{k=1}^n y_k e_k$$

Alors :

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \varphi(e_i, e_j)$$

Notons  $A$  la matrice  $(\varphi(e_i, e_j))_{i \in [1, n], j \in [1, n]}$ .

Elle est appelée matrice de la forme bilinéaire  $\varphi$  dans la base donnée.

$$\varphi(x, y) = {}^t XAY$$

**Théorème : isomorphisme**

L'application qui associe à toute forme bilinéaire sa matrice dans une base de  $E$  donnée est un isomorphisme.

**Corollaire :**

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices.

$$\forall X, Y \quad {}^t XAY = {}^t XBY \Rightarrow A = B$$

**Théorème : isomorphisme**

Une forme bilinéaire est symétrique si et seulement si sa matrice associée est symétrique.

Soit  $\phi$  la forme quadratique sur  $E$  associée à la forme bilinéaire  $\varphi$ .

$$\phi(x) = {}^t XAX$$

**Corollaire :**

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices symétriques.

$$\forall X \quad {}^t XAX = {}^t XBX \Rightarrow A = B$$

**Théorème : règle du dédoublement des termes**

Soit  $e$  une base de  $E$ . Une expression  $\phi$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  est une forme quadratique sur  $E$  si et seulement si elle s'exprime à l'aide d'un polynôme homogène de degré 2 en fonction des coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$  du vecteur  $x$  de  $E$ .

$$\forall x \in E \quad \phi(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 b_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j b_{i,j}$$

avec pour tout  $i$  et tout  $j$  entre 1 et  $n$  distincts,  $b_i$  et  $b_{i,j}$  réels. Dans ce cas, on obtient l'expression de la forme polaire de  $\phi$  en dédoubleant les termes de la manière suivante :

$x_i x_j$  se substitue à  $x_i^2$  et  $\frac{1}{2}(x_i y_j + x_j y_i)$  se substitue à  $x_i x_j$

**Théorème : changement de base**

Soient  $e$  et  $e'$  deux bases de  $E$  et  $P$  la matrice de passage de  $e$  à  $e'$ . Si  $\varphi$  est une forme bilinéaire sur  $E$  de matrices  $A$  et  $A'$  respectivement dans les bases  $e$  et  $e'$ . Alors  $A' = {}^t P A P$ .

Deux matrices  $A$  et  $B$  qui représentent la même forme quadratique dans des bases différentes sont dites **congruentes**. Les matrices  $A$  et  $B$  sont congruentes si et seulement s'il existe une matrice inversible  $P$  telle que  $B = {}^t P A P$ .

Le noyau d'une forme bilinéaire  $\varphi$  noté  $\text{Ker}(\varphi)$  est le noyau de l'application linéaire  $g$  associée à gauche :

$$\text{Ker}(\varphi) = \{x \in E, \quad \forall y \in E, \quad \varphi(x, y) = 0\}$$

Le noyau d'une forme quadratique est le noyau de sa forme polaire.

**Théorème : noyau**

Soit  $e$  une base de  $E$ ,  $\phi$  une forme quadratique sur  $E$ ,  $\varphi$  sa forme polaire et  $A$  sa matrice dans la base  $e$ . Le noyau de  $\phi$  est le sous-espace de  $E$  d'équation  $A X = 0$ .

Une forme bilinéaire symétrique ou une forme quadratique sont dites **non dégénérées** lorsque leur noyau est réduit à 0, c'est-à-dire lorsque l'application linéaire  $d$  associée à droite (ou  $g$  à gauche) est injective. Dans le cas contraire elles sont dites **dégénérées**.

**Théorème : discriminant**

Soit  $e$  une base de  $E$ ,  $\phi$  une forme quadratique sur  $E$ ,  $\varphi$  sa forme polaire et  $A$  sa matrice dans la base  $e$ . Les formes  $\phi$  ou  $\varphi$  sont dégénérées si et seulement si  $\text{Det}(A)=0$ .

Le déterminant  $\text{Det}(A)$  est appelé **discriminant de  $\phi$**  dans la base  $e$ . On note  $\Delta_e(\phi) = \text{Det}(A)$

Une forme quadratique est non dégénérée si et seulement si son discriminant est non nul et cela est indépendant de la base choisie.

Soit  $\varphi$  une forme bilinéaire symétrique, **le rang** de  $\varphi$  est le rang de l'application linéaire  $g$  associée à gauche (ou  $d$  à droite). Le rang d'une forme quadratique est le rang de sa forme polaire. On note  $rg(\varphi) = rg(\phi) = rg(A)$ .

Une forme quadratique  $\phi$  est **positive** lorsque pour tout  $x$  de  $E$ ,  $\phi(x) \geq 0$ . Elle est **définie positive** lorsque  $\phi(x) > 0$  pour tout  $x$  non nul de  $E$ .

Soit  $\varphi$  une forme bilinéaire symétrique. On dira qu'elle est positive (respectivement définie positive) lorsque la forme quadratique associée est positive (respectivement définie positive).

Soit  $A$  une matrice symétrique. Elle est positive si la forme quadratique canoniquement associée est positive :

$$\forall X, \quad {}^t X A X \geq 0$$

On dira que  $A$  est définie positive lorsque,

$$\forall X, \quad X \neq 0 \Rightarrow {}^t X A X > 0$$

**Théorème : inégalité de Cauchy-Schwarz**

Soit  $\phi$  une forme quadratique positive de forme polaire  $\varphi$ .

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \varphi(x, y)^2 \leq \phi(x)\phi(y)$$

Si la forme  $\phi$  est définie positive, il y a égalité si et seulement si la famille  $(x, y)$  est liée.

**Théorème : inégalité de Minkowski**

Soit  $\phi$  une forme quadratique positive.

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \sqrt{\phi(x+y)} \leq \sqrt{\phi(x)} + \sqrt{\phi(y)}$$

Si la forme  $\phi$  est définie positive, il y a égalité si et seulement si la famille  $(x, y)$  est positivement liée.

## 2 Structure d'espace préhilbertien réel

Une application  $\varphi$  de  $E \times E$  dans  $\mathbb{R}$  bilinéaire, symétrique, définie positive, est un **produit scalaire** sur  $E$ .

Un produit scalaire  $\varphi$  est donc une application de  $E \times E$  dans  $\mathbb{R}$  qui vérifie :

- $\forall (x, y) \in E^2, \quad \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$
- pour tout  $x$  de  $E$ , l'application  $g$  associée à gauche est linéaire
- $\forall x \in E, \quad \varphi(x, x) \geq 0$
- $\forall x \in E, \quad \varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Un espace vectoriel  $E$  muni d'un produit scalaire  $\varphi$  est appelé espace préhilbertien réel et est noté  $(E, \varphi)$ .

Lorsqu'il est complet, on dit espace de Hilbert.

Lorsqu'il est de dimension finie non nulle, on dit espace euclidien.

Tout espace euclidien est dit espace de Hilbert.

**Formules :**

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y)$$

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x|y)$$

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

$$(x|y) = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

$$|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|$$

$$|(x|y)| = \|x\| \|y\| \Leftrightarrow (x, y) \text{ liée}$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}^+ \quad x = ky$$

Soient  $(E_1, \varphi_1)$  et  $(E_2, \varphi_2)$  deux espaces préhilbertiens réels.  
 On appelle isomorphisme d'espaces préhilbertiens réels tout isomorphisme d'espaces vectoriels  $f$  de  $E_1$  sur  $E_2$  qui conserve le produit scalaire :

$$\forall (x, y) \in E_1^2, \quad \varphi_2(f(x), f(y)) = \varphi_1(x, y)$$

Un isomorphisme d'espaces préhilbertiens réels de  $(E, \varphi)$  sur lui-même est appelé automorphisme orthogonal.

**Définition : groupe orthogonal**

Soit  $(E, \varphi)$  un espace préhilbertien réel. L'ensemble des automorphismes orthogonaux de  $E$  forme un sous-groupe de  $(\mathcal{GL}(E), \circ)$  noté  $\mathcal{O}(E)$  et appelé groupe orthogonal de  $E$ .

**Théorème : isomorphisme**

Soient  $(E_1, \varphi_1)$  et  $(E_2, \varphi_2)$  deux espaces préhilbertiens réels,  $N_1$  et  $N_2$  les normes associées. Une application linéaire  $f$  de  $E_1$  dans  $E_2$ , surjective, est un isomorphisme d'espaces préhilbertiens réels, si et seulement si, elle est isométrique :

$$\forall x \in E_1, \quad N_2(f(x)) = N_1(x)$$

**Corollaire :**

Soit  $(E, (|))$  un espace préhilbertien réel et  $u$  un automorphisme de  $E$ . Il est équivalent de dire :

- l'automorphisme  $u$  est orthogonal
- l'automorphisme  $u$  conserve le produit scalaire
- l'automorphisme  $u$  conserve la norme :  $\forall x \in E \quad \|u(x)\| = \|x\|$

**Théorème : norme subordonnée**

Soit  $(E, (|))$  un espace préhilbertien réel,  $\| \cdot \|$  la norme associée et  $u$  un endomorphisme continu de  $E$ . Alors la norme subordonnée à la norme euclidienne de  $u$  est :

$$\|u\| = \sup\{(u(x)|y); (x, y) \in E^2 \quad \|x\| \leq 1 \quad \|y\| \leq 1\}$$

### 3 Orthogonalité

Soit  $(E, (|))$  un espace préhilbertien réel et  $\| \cdot \|$  la norme associée.  
 Un vecteur  $x$  de  $E$  est dit unitaire lorsque  $\|x\| = 1$ .

Un vecteur  $x$  est dit orthogonal à un vecteur  $y$  lorsque  $(x|y) = 0$ . On note  $x \perp y$ .

**Théorème de Pythagore :**

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad x \perp y \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Soit  $A$  une partie de  $E$ , l'orthogonal de  $A$ , noté  $A^\perp$  est l'ensemble :

$$\{x \in E; \forall a \in A \quad x \perp a\}$$

**Formules :**

Soit  $(E, \varphi)$  un espace préhilbertien réel,  $A$  et  $B$  des parties de  $E$ . Alors :

- $A^\perp$  est un sous-espace vectoriel de  $E$
- $A^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp$
- $A \subset (A^\perp)^\perp$
- $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$
- $A \subset B^\perp \Leftrightarrow B \subset A^\perp$

Lorsque deux parties  $A$  et  $B$  de  $E$  vérifient l'une des propriétés équivalentes  $A \subset B^\perp$  ou  $B \subset A^\perp$  on dit que les parties  $A$  et  $B$  sont orthogonales.

**Théorème :**

Soit  $(E, \varphi)$  un espace préhilbertien réel et  $F$  un sous-espace de  $E$ . Alors :

- $F \cap F^\perp = \{0_E\}$
- $F \subset (F^\perp)^\perp$ . En particulier  $\{0_E\}^\perp = E$  et  $E^\perp = \{0_E\}$ .

Deux sous-espaces  $F$  et  $G$  de  $E$  sont dits orthogonaux lorsque :

$$\forall x \in F \quad \forall y \in G \quad x \perp y$$

$F$  et  $G$  sont orthogonaux si et seulement si :  $G \subset F^\perp$  ou  $F \subset G^\perp$ .

Une famille  $(e_i)_{i \in I}$  de  $E$  est orthogonale si :

$$\forall i \in I \quad \forall j \in I \quad i \neq j \Rightarrow (e_i | e_j) = 0$$

Une famille  $(e_i)_{i \in I}$  de  $E$  est orthonormale si :

$$\forall i \in I \quad \forall j \in I \quad i \neq j \Rightarrow (e_i | e_j) = \delta_{i,j}$$

**Théorème :**

Toute famille orthogonale formée de vecteurs non nuls est libre. Toute famille orthonormale est libre.

**Relation de Pythagore :**

Soit  $(e_i)_{i \in I}$  une famille est orthonormale de E finie.

$$\left\| \sum_{i \in I} e_i \right\|^2 = \sum_{i \in I} \|e_i\|^2$$

Deux sous-espaces F et G sont dits supplémentaires orthogonaux lorsque :

$$E = F \oplus G \quad F \perp G$$

**Théorème :**

Si F et G sont supplémentaires orthogonaux, alors

$$G = F^\perp \quad \text{et} \quad F = (F^\perp)^\perp$$

On appelle projecteur orthogonal tout projecteur p de E tel que Im p et Ker p sont supplémentaires orthogonaux.

**Théorème : projecteur**

Un projecteur p d'image F est un projecteur orthogonal si et seulement si F admet un supplémentaire orthogonal  $G = F^\perp$  et si  $\text{Ker}(p) = F^\perp$ .

Si F admet un supplémentaire orthogonal, le seul projecteur orthogonal d'image F est la projection orthogonale d'image F et de direction  $F^\perp$ , on le note  $p_F$ .

**Théorème : distance**

Soit  $(E, (\cdot, \cdot))$  un espace préhilbertien réel et  $\| \cdot \|$  sa norme associée. Soit a un élément de E et F un sous-espace de E. Alors :

- pour tout x de F :  $\|a - x\| = d(a, F) \Leftrightarrow a - x \in F^\perp$

- il existe au plus un vecteur x qui vérifie  $\|a - x\| = d(a, F)$  - si F admet un supplémentaire orthogonal,  $p_F(a)$  est l'unique vecteur x de F tel que :

$$\|a - x\| = d(a, F) \quad \text{et} \quad \|a\|^2 = \|p_F(a)\|^2 + d(a, F)^2$$

**Théorème :**

Soit  $(E, (\cdot, \cdot))$  un espace préhilbertien réel. Tout sous-espace de dimension finie admet un supplémentaire orthogonal.

**Corollaire :**

Soit  $(E, (|))$  un espace préhilbertien réel et  $F$  un sous-espace de  $E$  de dimension finie.

- $E = F \oplus F^\perp$
- $(F^\perp)^\perp = F$
- $\text{codim}(F^\perp) = \text{dim}(F)$
- Si  $(e_1, \dots, e_p)$  est une base orthonormale de  $F$ , alors :

$$\forall x \in E \quad p_F(x) = \sum_{i=1}^p (e_i | x) e_i$$

$$\forall x \in E \quad \sum_{i=1}^p (e_i | x)^2 \leq \|x\|^2$$

**Théorème :**

Soit  $(E, (|))$  un espace préhilbertien réel. Soit  $(F_i)_{i \in I}$  une famille finie de sous-espaces vectoriels de  $E$  orthogonaux deux à deux. Alors la somme  $\sum_{i \in I} F_i$  est directe.

Si une famille finie de sous-espaces vectoriels de  $E$  orthogonaux deux à deux. La somme directe est dite somme directe orthogonale.

**Théorème :**

Soit  $(E, (|))$  un espace préhilbertien réel. Soit  $(F_i)_{i \in [1, n]}$  une famille de  $n$  sous-espaces vectoriels de  $E$  telle que  $E$  est la somme directe orthogonale des  $F_i$ . Pour tout  $x = (x_1, \dots, x_n)$  de  $F_1 \times \dots \times F_n$ , on a :

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$$