Fonctions intégrables

1 Convergence des intégrales généralisées

On dit d'une fonction f de $\mathscr{CM}(I, \mathbb{K})$ est intégrable sur I si l'intégrale $\int_I |f|$ converge.

Théorème :
Une fonction f de $\mathscr{CM}(I, \mathbb{K})$ est intégrable sur I si et seulement s'il existe un réel positif M tel que, pour tout segment J contenu dans I, on ait :

$$\int_I |f| \leq M$$

L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^a}$ converge si et seulement si $a > 1$. Les fonctions f_a sont intégrables sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $a > 1$. Dans ce cas :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^a} = \frac{1}{a-1}$$

L'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{t^a}$ converge si et seulement si $a < 1$. Les fonctions f_a sont intégrables sur $]0, 1]$ si et seulement si $a < 1$. Dans ce cas :

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^a} = \frac{1}{1-a}$$

La fonction ln est intégrable sur $]0, 1]$.
Les fonctions e^{-at} sont intégrables sur $[0, +\infty[$ si, et seulement si $a > 0$.

Théorème :
Soit f une fonction continue par morceaux de I dans $\mathbb{R}^+$ et F une primitive sur I. Alors :
- f est intégrable sur I si et seulement si la fonction F est bornée sur I,
- si f est intégrable sur I, on a :

$$\int_I f = \lim_{y \to \sup(I)} F(y) - \lim_{x \to \inf(I)} F(x)$$

Théorème :
Soit f dans $\mathscr{CM}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, décroissante, alors la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si, la série $\sum f(n)$ converge.

Théorème :
Soit $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et f, g deux fonctions de $\mathscr{CM}([a,b[,\mathbb{R})$. Si $f =_b O(g)$ et g est intégrable sur $[a,b[$, alors f est intégrable sur $[a,b[$.

Théorème :
Soit f une fonction continue, positive et intégrable sur I. L'intégrale de f sur I est nulle si et seulement si f est nulle.

Théorème :
Le produit de deux fonctions de carré intégrable sur I est intégrable sur I.

Théorème de convergence dominée de Lebesgue :
Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$ telle ques :
- la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur I vers une fonctions f continue par morceaux sur I.
- il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur I telle que, pour tout entier n, $|f_n| \leq \varphi$ (hypothèse dite de domination)

Alors :
- Les applications f_n et f sont intégrables sur I.
- La suite numérique $(\int_I f_n)$ converge vers $\int_I f$:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n = \int_I f$$

Théorème :
Soit (u_n) une suite de fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$ et telle que :
- pour tout n, u_n est intégrable sur I.
- la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I et sa fonction somme, S, est continue par morceaux sur I.
- la série numérique $\sum(\int_I |u_n(t)|dt)$ converge.

Alors :
- S est intégrable sur I, et

$$\int_I S = \int_I (\sum_0^{\infty} u_n) = \sum_0^{\infty} (\int_I u_n)$$

Continuité d'une fonction définie par une intégrale :
Soit $f : ((x,t) \mapsto f(x,t))$ une fonction de $A \times I$ dans $\mathbb{K}$. On suppose que :
- f est continue par rapport à la première variable x.
- f est continue par morceaux par rapport à la seconde variable t.
- il existe φ dans $\mathscr{I}(I, \mathbb{R}^+)$ telle que :

$$\forall (x,t) \in A \times I \qquad |f(x,t)| \leq \varphi(t)$$

Alors :
- pour tout x de A, la fonction $(t \mapsto f(x,t))$ est intégrable sur I.
- la fonction F, définie sur A par $F(x) = \int_I f(x,t)dt$, est continue sur A.

Dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale
Soit A un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : ((x,t) \mapsto f(x,t))$ une fonction de $A \times I$ dans $\mathbb{K}$. On suppose que :
- pour tout x de A, la fonction $(t \mapsto f(x,t))$ est continue par morceaux et intégrable sur I.
- f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$, par rapport à la première composante.
- cette dérivée partielle est continue par rapport à la première variable x, et continue par morceaux par rapport à la seconde t.
- il existe une fonction φ de $\mathscr{I}(I, \mathbb{R}^+)$ telle que :

$$\forall (x,t) \in A \times I, \qquad |\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \leq \varphi(t)$$

Alors la fonction F, définie sur A par $F(x) = \int_I f(x,t)dt$, est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A, et, pour tout c de A :

$$F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$$