Les matrices

1 Règles de calcul

Définition :
Soit $\mathbb{K}$ un corps. $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ à n lignes et p colonnes.

$$A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \iff \underset{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}{(a_{i,j})} \in \mathbb{K}^{np}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on note C_1, C_2, ..., C_p ses colonnes :

$$C_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix} = \underset{1\leq i\leq n}{(a_{i,1})} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

et on note L_1, ..., L_n ses lignes :

$$L_i = \begin{pmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,p} \end{pmatrix} = \underset{1\leq j\leq p}{(a_{i,j})} \in \mathfrak{M}_{1,p}(\mathbb{K})$$

On peut alors écrire :

$$A = \begin{pmatrix} C_1 & \vdots & C_2 & \vdots & \cdots & \vdots & C_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ \cdots\cdots \\ \cdots \\ \cdots\cdots \\ L_n \end{pmatrix}$$

<u>Exemples</u> :

$E_{i,j}$ est "la" matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui qui est à l'intersection de la i ème ligne et de la j ème colonne, et qui est égal à 1 :

$$E_{i,j} = (\delta_{k,i} \times \delta_{l,j})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq l \leq p}}$$

La matrice identité est la matrice dont les coefficients sur la diagonale sont égaux à 1 et les autres nuls :

$$I_n \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = E_{1,1} + \cdots + E_{n,n}$$

Définition :
Une matrice est carrée lorsque le nombre de ses lignes et le nombre de ses colonnes sont égaux.

On note $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ au lieu de $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.

Définition :
La taille d'une matrice A est :
1) le couple (n,p) si $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
2) l'entier n si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$

1.1 Opérations

1.1.1 Addition

Données : $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$

Ce sont deux matrices de même tailles

Résultat : La somme A+B est la matrice $(a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$

1.1.2 Multiplication externe

Données : $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Résultat : λA est la matrice $(\lambda a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$

1.1.3 Transposition

Donnée : $A = \underset{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}{(a_{i,j})} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Résultat : La transposée de A, notée ${}^tA$ est la matrice $A = \underset{\substack{1\le i\le p\\1\le j\le n}}{(a'_{i,j})} \in \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ où $a'_{i,j} = a_{j,i}$: on permute les lignes et les colonnes.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

La transposition est une opération interne à $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, mais pas à $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ si $n \neq p$ (changement de taille).

1.1.4 Multiplication interne

Données : $A = \underset{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}{(a_{i,j})}$ et $B = \underset{\substack{1\le j\le p\\1\le k\le q}}{(b_{j,k})}$

Le produit AB est défini $\Longleftrightarrow$ le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B

Résultat : $AB = \underset{\substack{1\le i\le n\\1\le k\le q}}{(c_{i,k})}$ où $\forall i,\ \forall k,\ c_{i,k} = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} \times b_{j,k}$

1.1.5 Action des $E_{i,j}$

1) $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$

$$E_{j,1} \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \longrightarrow AE_{j,1} = C_j$$

$$E_{1,i} \in \mathfrak{M}_{1,n}(\mathbb{K}) \longrightarrow E_{1,i}A = L_i$$

$\forall 1 \le i \le n,\ (AE_{j,i}) = \sum_{l=1}^{p} a_{i,l} \underbrace{(\delta_{l,j} \times \delta_{1,1})}_{=1 \leftrightarrow l=j} = a_{i,j}$

donc $AE_{j,1} = C_j$ $\forall 1 \le j \le p,\ (E_{1,i}A)_{1,j} = \sum_{l=1}^{n} \underbrace{(\delta_{1,1}\delta_{l,i})}_{=1 \leftrightarrow l=i} a_{l,j} = a_{i,j}$

donc $E_{1,i}A = L_i$

2) $E_{1,i} \in \mathfrak{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et $E_{j,1} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

$$E_{1,i}E_{j,1} = \delta_{i,j} \in \mathfrak{M}_1(\mathbb{K})$$

$$E_{j,1}E_{1,i} = E_{j,i} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$$

$E_{1,i}E_{j,1} = \sum_{l=1}^{1}(\delta_{1,1}\delta_{i,l})(\delta_{j,l}\delta_{1,1}) = \delta_{i,j}$

$\forall 1 \leq k, l \leq n$, $(E_{j,1}E_{1,i})_{k,l} = \sum_{m=1}^{1}(\delta_{j,k}\delta_{1,m})(\delta_{1,m}\delta_{i,l}) = \delta_{j,k}\delta_{i,l}$

Donc $(E_{j,1}E_{1,i})_{k,l} = E_{j,i}$

3)

$$E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$$

$E_{i,j} = E_{i,1}E_{1,j}$
$E_{k,l} = E_{k,1}E_{1,l}$
donc

$$\begin{aligned} E_{i,j}E_{k,l} &= E_{i,1}\underbrace{(E_{1,j}E_{k,1})}_{\delta_{j,k}}E_{1,l} && (1)\\ &= \delta_{j,k}E_{i,1}E1,l && (2)\\ &= \delta_{j,k}E_{i,l} && (3) \end{aligned}$$

4)

$$AE_{i,j} = C_iE_{1,j}$$

$$E_{i,j}A = E_{1,i}L_j$$

En effet,

$$\begin{aligned} AE_{i,j} &= A(E_{i,1}E_{1,j}) && (4)\\ &= (AE_{i,1})E_{1,j} && (5)\\ &= C_iE_{1,j} && (6) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E_{i,j}A &= (E_{i,1}E_{1,j})A && (7)\\
&= E_{i,1}(E_{1,j}A) && (8)\\
&= E_{1,j}L_j && (9)
\end{aligned}
$$

5) $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

$$AI_p = A$$

$$I_nA = A$$

$$
\begin{aligned}
\forall 1 \leq k \leq n, \forall 1 \leq l \leq p, (AI_p)_{k,l} &= \sum_{m=1}^{p} a_{k,m}\delta_{m,l} && (10)\\
&= a_{k,l}\delta_{l,l} && (11)\\
&= a_{k,l} && (12)
\end{aligned}
$$

Donc $AI_p = A$

$$
\begin{aligned}
\forall 1 \leq k \leq n, \forall 1 \leq l \leq p, (I_nA)_{k,l} &= \sum_{m=1}^{n} \delta_{k,m}a_{m,l} && (13)\\
&= a_{k,l} && (14)
\end{aligned}
$$

Donc $I_nA = A$

6)

Théorème :

$$^t(AB) =^t B^tA$$

Démonstration :
$A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $^tA \in \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{K})$
$B \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $^tB \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$
$AB \in \mathfrak{M}_{n,q}(\mathbb{K})$, $^tB^tA \in \mathfrak{M}_{q,n}(\mathbb{K})$

${}^t(AB) \in \mathfrak{M}_{q,n}(\mathbb{K})$

$A = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$, $B = (b_{j,k})_{\substack{1\le j\le p\\1\le k\le q}}$, $AB = (\gamma_{i,k})_{\substack{1\le i\le n\\1\le k\le q}}$, ${}^tA = (\alpha_{j,i})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$, ${}^tB = (\beta_{k,j})_{\substack{1\le k\le q\\1\le j\le p}}$

$({}^tB{}^tA)_{k,i} = \sum_{j=1}^p \beta_{k,j}\alpha_{j,i} = \sum_{j=1}^p b_{j,k}a_{i,j} = \sum_{j=1}^p a_{i,j}b_{j,k} = \gamma_{i,k}$

Donc ${}^tA{}^tB ={}^t(AB)$.

1.2 Structures

Théorème :
$\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Sa dimension est np.

La famille $(E_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ est une base de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ car :

$(a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{i,j}E_{i,j}$ (famille génératrice)

et $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{i,j}E_{i,j} = 0 \iff \forall i \forall j, a_{i,j} = 0$ (famille libre)

Définition :
La famille $(E_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ est la base canonique de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Proposition :
La transposition est une application linéaire involutive de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dans $\mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

Démonstration :

$A = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$, ${}^tA = (\alpha_{j,i})_{\substack{1\le j\le p\\1\le i\le n}}$, ${}^t({}^tA) = (a'_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$, $B = (b_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$, ${}^tB = (\beta_{j,i})_{\substack{1\le j\le p\\1\le i\le n}}$, $(\lambda A + B = (\lambda a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$, ${}^t(\lambda A + B) = (\gamma_{j,i})_{\substack{1\le j\le p\\1\le i\le n}}$

$\forall i, j,\ \gamma_{j,i} = \lambda a_{i,j} + b_{i,j} = \lambda\alpha_{j,i} + \beta_{j,i}$

donc ${}^t(\lambda A + B) = \lambda{}^tA +{}^t B$.

et $\forall i, j,\ a'_{i,j} = \alpha_{j,i} = a_{i,j}$

donc ${}^t({}^tA) = A$.

Théorème :
$(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, .)$ est une algèbre associative sur $(\mathbb{K})$.

Proposition :
La multiplication est bilinéaire de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ dans $\mathfrak{M}_{n,q}(\mathbb{K})$.

Conséquence : les formules sommatoires s'appliquent aux matrices comme la formule du binôme de Newton.

Sous-ensembles remarquables de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$

$*$ $(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau donc l'ensemble des matrices inversibles de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est un groupe.

Définition :
$GL_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) : \exists A' \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), AA' = A'A = I_n\}$

$*$ La transposition est une symétrie sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Donc $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \bigoplus A_n(\mathbb{K})$ où

$S_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), {}^tA = A\}$ (matrices symétriques)
$A_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), {}^tA = -A\}$ (matrices anti-symétriques)

et $\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}),\ M = (\frac{M+{}^tM}{2}) + (\frac{M-{}^tM}{2})$

Proposition :

$$dim(S_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n+1)}{2}$$

et

$$dim(A_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n-1)}{2}$$

Démonstration :
$\forall i,\ E_{i,i} \in S_n(\mathbb{K})$
$\forall i \neq j,\ E_{i,j} + E_{j,i} \in S_n(\mathbb{K})$
$\forall i \neq j,\ E_{i,j} - E_{j,i} \in A_n(\mathbb{K})$ car $\forall i, j,\ {}^tE_{i,j} = E_{j,i}$.

On a ainsi une famille de n^2 matrices.
Or $E_{i,j} = \frac{1}{2}(E_{i,j} + E_{j,i}) + \frac{1}{2}(E_{i,j} - E_{j,i})$.
Donc la famille $(E_{1,1}, \dots, E_{n,n}, (E_{i,j} + E_{j,i})_{1 \leq i \leq j \leq n}, \dots, (E_{i,j} - E_{j,i})_{1 \leq i \leq j \leq n})$ engendre $Vect(E_{i,j}, 1 \leq i \leq j \leq n) = \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
C'est donc une base et en particulier une famille libre.

Définition :
L'ensemble $D_n(\mathbb{K})$ des matrices diagonales est $Vect(E_{i,i}, 1 \leq i \leq n)$.

$\Delta \in D_n(\mathbb{K}) \iff \exists (a_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_i E_{i,i}$.

$$\Delta = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

Définition :
L'ensemble $U_n(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires supérieures est $Vect(E_{i,j}, 1 \leq i \leq j \leq n)$.

$$M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ & a_{2,2} & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Définition :
L'ensemble $L_n(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires inférieures est $Vect(E_{i,j}, 1 \leq j \leq i \leq n)$.

$$M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & & 0 \\ \vdots & a_{2,2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Proposition :

$$dim(L_n(\mathbb{K})) = dim(U_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Une matrice triangulaire inférieure est symétrique par transposition à une matrice triangulaire supérieure.

Proposition :
$L_n(\mathbb{K}), U_n(\mathbb{K}), D_n(\mathbb{K})$ sont stables par multiplication.

Démonstration : $A, B \in L_n(\mathbb{K})$

$A = \sum_{1 \leq j \leq i \leq n} a_{i,j} E_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} E_{i,j}$ avec $\forall i < j,\ a_{i,j} = 0$

$B = \sum_{1 \leq l \leq k \leq n} b_{k,l} E_{k,l} = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{k,l} E_{k,l}$ avec $\forall k < l,\ b_{k,l} = 0$

donc

$$AB = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{i,j} b_{k,l} \underbrace{E_{i,j} E_{k,l}}_{\delta_{j,k} E_{i,l}} \tag{15}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \underbrace{(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,l})}_{=0, \forall i < l} E_{i,l} \tag{16}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,l} = \underbrace{\sum_{j=1}^{l-1} a_{i,j} b_{j,l}}_{\substack{j<l \\ \rightarrow b_{j,l}=0}} + \underbrace{\sum_{j=l}^{n} a_{i,j} b_{j,l}}_{\substack{j \geq l > i \\ \rightarrow a_{i,j}=0}} = 0$$

<u>Remarque</u> : Pour $i = l$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,l} = \sum_{j=1}^{l-1} a_{i,j} \underbrace{b_{j,l}}_{=0} + a_{i,i} b_{i,i} + \sum_{j=i+1}^{n} \underbrace{a_{i,j}}_{=0} b_{j,l}$$

Donc

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & b_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} b_{1,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & a_{n,n} b_{n,n} \end{pmatrix}$$

En particulier

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{n,n}b_{n,n} \end{pmatrix}$$

Une matrice est la décomposition du produit d'une matrice triangulaire inférieure avec une matrice triangulaire supérieure.

1.3 Opérations élémentaires

Sur les lignes :
$L_i \longleftarrow L_i + \alpha L_j$ avec $i \neq j$
$L_i \longleftarrow \alpha L_i$ avec α inversible
$L_i \longleftrightarrow L_j$

<u>Traductions matricelles.</u>

$*$ $L_i \longleftarrow L_i + \alpha L_j$ correspond à $A \longleftarrow (I_n + \alpha E_{i,j})A$

Avec la formule : $A' = (I_n + \alpha E_{i,j})A$

$$\begin{aligned}
a'_{k,l} &= \sum_{r=1}^{n} (\delta_{k,r} + \alpha \delta_{k,i}\delta_{r,j}) a_{r,l} && (17) \\
&= (\sum_{r=1}^{n} \delta_{k,r} a_{r,l}) + \alpha (\sum_{r=1}^{n} \delta_{k,i}\delta_{r,j} a_{r,l}) && (18) \\
&= a_{k,l} + \alpha \delta_{k,i} a_{j,l} && (19) \\
&= \begin{cases} a_{k,l}, & \text{si } k \neq i \\ a_{i,l} + \alpha a_{j,l}, & \text{si } k = i \end{cases} && (20)
\end{aligned}$$

$*$ $L_i \longleftarrow \alpha L_i$ correspond à $A \longleftarrow (\alpha E_{i,i} + \sum_{1 \leq j \leq n \text{ et } i \neq j} E_{j,j})A$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \alpha & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha L_i \\ \vdots \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
a'_{k,l} &= \sum_{r=1}^{n}(\alpha\delta_{k,i}\delta_{r,i} + \sum_{1\leq j\leq n \text{ et } j\neq i} \delta_{k,j}\delta_{r,j})a_{r,l} && (21)\\
&= \begin{cases} a_{k,l}, & \text{si } k \neq i \\ \alpha a_{i,l}, & \text{si } k = i \end{cases} && (22)
\end{aligned}
$$

$*$ $L_i \longleftrightarrow L_j$ correspond à $A \longleftarrow (E_{i,j} + E_{j,i} + \sum_{1\leq k\leq n \text{ et } k\neq j \text{ et } k\neq i} E_{k,k})A$

$$
\begin{aligned}
a'_{l,m} &= \sum_{r=1}^{n}(\delta_{i,l}\delta_{j,r} + \delta_{j,l}\delta_{i,r} + \sum_{k\neq i \text{ et } k\neq j} \delta_{k,l}\delta_{k,r})a_{r,m} && (23)\\
&= \begin{cases} a_{l,m}, & \text{pour } l \neq i \text{ et } l \neq j \\ a_{j,m}, & \text{pour } l = i \\ a_{i,m}, & \text{pour } l = j \end{cases} && (24)
\end{aligned}
$$

<u>Notations :</u>

Transposition : $L_i \longleftrightarrow L_j$ correspond à $T_{i,j}$
Dilatation : $L_i \longleftarrow \alpha L_i$ correspond à $M_i(\alpha)$
Transvection : $L_i \longleftarrow L_i + \alpha L_j$ correspond à $S_{i,j}(\alpha)$

$T_{i,j}T_{i,j} = I_n$
$M_i(\alpha)M_i(\alpha^{-1}) = I_n = M_i(\alpha^{-1})M_i(\alpha)$
$S_{i,j}(\alpha)S_{i,j}(-\alpha) = I_n = S_{i,j}(-\alpha)S_{i,j}(\alpha)$

Donc $T_{i,j}$ est inversible et $(T_{i,j})^{-1} = T_{i,j}$
Donc $M_i(\alpha)$ est inversible et $(M_i(\alpha))^{-1} = M_i(\alpha^{-1})$
Donc $S_{i,j}(\alpha)$ est inversible et $(S_{i,j}(\alpha))^{-1} = S_{i,j}(-\alpha)$

Opérations sur les colonnes :
$C_i \Longleftrightarrow C_j$ correspond à $A \longleftarrow AT_{i,j}$
$C_i \Longleftrightarrow \alpha C_i$ correspond à $A \longleftarrow AM_i(\alpha)$
$C_i \Longleftrightarrow C_j + \alpha C_i$ correspond à $A \longleftarrow AS_{i,j}(\alpha)$

<u>Bilan</u> : Une opération de pivot correspond à une multiplication par une matrice inversible. De plus, le pivot sur les lignes est une multiplication par la gauche, et le pivot sur les colonnes est une multiplication par la droite.

Théorème :
Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Il existe un entier r tel que $0 \leq r \leq min\{n,p\}$ et deux matrices inversibles $P \in GL(\mathbb{K})$ et $Q \in GL(\mathbb{K})$ telles que :

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

Cas particuliers :

$\begin{pmatrix} I_n & \vdots & 0 \end{pmatrix}$ alors A est surjective.

$\begin{pmatrix} I_p \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$ alors A est injective.

$\begin{pmatrix} I_r \end{pmatrix}$ alors A est inversible.

Démonstration : On suppose qu'àprès les opérations de pivot, on est arrivé à :

$$A_k = \begin{pmatrix} I_k & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & B_k \end{pmatrix}$$

Si $B_k = 0$, c'est terminé.
Si $B_k \neq 0$, en échangeant deux lignes et/ou deux colonnes, on peut ramener un coefficient non nul en position $(k+1, k+1)$. On peut alors normaliser ce coefficient : $\beta \neq 0 \Longrightarrow \beta$ est inversible ($\mathbb{K}$ est un corps) et l'opération $A \longleftarrow M_{k+1}(\beta^{-1})A$ permet de supposer que ce coefficient vaut 1.

On effectue :
$\forall k+2 \leq j \leq p : C_j \longleftarrow C_j - b_{i,j}C_{k,+1}$
$\forall 2 \leq i \leq n-k : L_i \longleftarrow L_i - b_{i,k+1}L_{k+1}$

et on arrive à :

$$A_{k+1} = \begin{pmatrix} I_{k+1} & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & B_{k+1} \end{pmatrix}$$

2 Les matrices comme représentations

2.1 Vecteurs

E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$.
$\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
$\mathscr{B}^\star = (e_1^\star, \ldots, e_n^\star)$ sa base duale.

Définition :
$\forall x \in E,\ Mat_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} e_1^\star(x) \\ \vdots \\ e_n^\star(x) \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Autrement dit, $Mat_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \iff x = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k$

Proposition :

$$Mat_{\mathscr{B}}(x) = Mat_{\mathscr{B}}(y) \iff x = y$$

Démonstration : $C = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.
Si $Mat_{\mathscr{B}}(x) = Mat_{\mathscr{B}}(y) = C$, alors $x = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k = y$.

Proposition :
$\forall (x, y) \in E^2$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}$,

$$Mat_{\mathscr{B}}(\lambda x + y) = \lambda Mat_{\mathscr{B}}(x) + Mat_{\mathscr{B}}(y)$$

Démonstration : $Mat_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ et $Mat_{\mathscr{B}}(y) = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$.
Donc $\lambda Mat_{\mathscr{B}}(x) + Mat_{\mathscr{B}}(y) = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 + \beta_1 \\ \vdots \\ \lambda\alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}$.
Or $x = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k$ et $y = \sum_{k=1}^n \beta_k e_k$ et $\lambda x + y = \sum_{k=1}^n (\lambda\alpha_k + \beta_k) e_k$.

Donc $Mat_{\mathscr{B}}(\lambda x+y) = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1+\beta_1 \\ \vdots \\ \lambda\alpha_n+\beta_n \end{pmatrix}$.

Proposition :
$\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $\exists x \in E$ tel que $X = Mat_{\mathscr{B}}(x)$

Démonstration : Il existe $(\alpha_k)_{1\leq k\leq n} \in \mathbb{K}^n$ tel que $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.

Avec $x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$, on a bien $X = Mat_{\mathscr{B}}(x)$ (par unicité de la décomposition dans la base $\mathscr{B}$).

Conclusion :
$E \longrightarrow \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
$x \longrightarrow Mat_{\mathscr{B}}(x)$
est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

A moins que $E = \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, il est interdit d'écrire $x = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.

Cas particulier important :
$E = \mathbb{K}^n$
$\mathscr{B}$ la base canonique de E.

$x = (x_1, \dots, x_n)$ et $Mat_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

$$ {}^t Mat_{\mathscr{B}}(x) \in \mathfrak{M}_{1,n}(\mathbb{K}) \neq x \in \mathbb{K}^n $$

2.2 Applications linéaires

Cas général

E espace vectoriel de dimension p sur $\mathbb{K}$.
$\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E.
E espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$.
$\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F.
$\mathscr{C}^\star = (f_1^\star, \dots, f_n^\star)$ sa base duale.
$u \in L(E, F)$.

Définition :

$$Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = (f_i^\star(u(e_j)))_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} \in \mathfrak{M}_{n,p}\mathbb{K}$$

La j-ème colonne de cette matrice est $\begin{pmatrix} f_1^\star(u(e_j)) \\ \vdots \\ f_n^\star(u(e_j)) \end{pmatrix} = Mat_{\mathscr{C}}(u(e_j))$.

Nombre de lignes = dimension de l'espace d'arrivée.
Nombre de colonnes = dimension de l'espace de départ.

Proposition :

$$\forall x \in E,\ Mat_{\mathscr{C}}(u(x)) = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) \times Mat_{\mathscr{B}}(x)$$

Démonstration : $A = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

$X = Mat_{\mathscr{B}}(x) = x_{j_{1\leq j\leq p}} \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ donc AX existe et $AX \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

$Y = Mat_{\mathscr{C}}(u(x)) \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Par définition : $x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j$

Donc

$$u(x) = \sum_{j=1}^{p} x_j u(e_j) \tag{25}$$

$$= \sum_{j=1}^{p} x_j (\underbrace{\sum_{i=1}^{n} f_i^\star(u(e_j)) f_i}_{\text{j-ème colonne de A}}) \tag{26}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\underbrace{\sum_{j=1}^{p} f_i^\star(u(e_j)) x_j}_{\substack{\text{coefficient situé sur} \\ \text{la i-ème ligne de AX}}}) f_i \tag{27}$$

Or $u(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i^\star(u(x)) f_i$.

Donc par identification, $Y = AX$.

Proposition :

$$Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\lambda u + v) = \lambda Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) + Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}(v)}$$

Démonstration :

$A = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ où $a_{i,j} = f_i^\star(u(e_j))$.

$B = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(v) = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ où $b_{i,j} = f_i^\star(v(e_j))$.

$\lambda A + B = (\lambda a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$

Or $\lambda a_{i,j} + b_{i,j} = f_i^\star(\lambda u(e_j) + v(e_j)) = f_i^\star((\lambda u + v)(e_j))$.

Donc $\lambda A + B = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\lambda u + v)$.

Proposition :

$$Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(v) \iff u = v$$

Démonstration : $\forall i \forall j,\ f_i^\star(u(e_j)) = f_i^\star(v(e_j))$

donc $\forall j,\ \sum_{i=1}^n f_i^\star(u(e_j))f_i = \sum_{i=1}^n f_i^\star(v(e_j))f_i$

donc $\forall j$, $u(e_j) = v(e_j)$ (on a raisonné sur les colonnes).

Donc $\forall x \in E$,

$$\begin{aligned} u(x) &= u(\sum_{j=1}^p e_j^\star(x)e_j) && (28)\\ &= \sum_{j=1}^p e_j^\star(x)u(e_j) && (29)\\ &= \sum_{j=1}^p e_j^\star(x)v(e_j) && (30)\\ &= v(x) && (31)\end{aligned}$$

donc u=v.

Deux applications linéaires qui coïncident sur $\mathscr{B}$ coïncident en fait sur E

Proposition :

$$\forall A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \exists u \in L(E,F),\ A = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$$

Analyse : si u existe, alors $\forall 1 \leq j \leq p$, $u(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j}f_i$ (la j-ème colonne de A représente $u(e_j)$ dans la base $\mathscr{C}$)

donc $\forall x \in E$, $u(x) = \sum_{j=1}^n e_j^\star(x)u(e_j) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^p a_{i,j}e_j^\star(x)f_i$

$\longrightarrow$ Une seule possibilité.

Synthèse : on définit $u : E \longrightarrow F$, en posant :

$$\forall x \in E,\ u(x) = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n a_{i,j}e_j^\star(x)f_i$$

Cela définit une application linéaire :

$\forall x \forall y \forall \lambda,$

$$u(\lambda x+y)=\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n}a_{i,j}e_j^\star(\lambda x+y)f_i \tag{32}$$
$$=\sum_{j=1}^{p}\sum i=1^n a_{i,j}(\lambda e_j^\star(x)+e_j^\star(y))f_i \tag{33}$$
$$=\lambda u(x)+u(y) \tag{34}$$

$\forall i \forall j,\ f_i^\star(u(e_j))=f_i^\star(\sum_{l=1}^{p}\sum_{k=1}^{n}a_{k,l}e_l^\star(e_j)f_k)=\sum_{k=1}^{n}a_{k,j}\underbrace{f_i^\star(f_k)}_{\delta_{i,k}}=a_{i,j}$

Donc $Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}=A$.

Conclusion :
$L(E,F)\longrightarrow \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
$u\longrightarrow Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$
est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Proposition :
$u\in L(E,F)$, $\mathscr{B}$ base de E, $dim(E)=p$
$v\in L(F,G)$, $\mathscr{C}$ base de F, $dim(F)=n$
$\mathscr{D}$ base de G, $dim(G)=m$

Alors $Mat_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(vou)=Mat_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(v)\times Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$

Démonstration : $A=Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)=(f_i^\star(u(e_j)))_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}\in\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

$B=Mat_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(v)=(g_h^\star(v(f_i)))_{\substack{1\leq h\leq m\\ 1\leq i\leq n}}\in\mathfrak{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

BA est défini et $BA\in\mathfrak{m},\mathfrak{p}(\mathbb{K})$.

D'autre part, $vou\in L(E,G)$ donc $Mat_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(vou)\in\mathfrak{m},\mathfrak{p}(\mathbb{K})$

$\forall h \forall j$

$$g_h^\star(vou(e_j)) = g_h^\star(v\,\underbrace{(\sum_{i=1}^{n} f_i^\star(u(e_j))f_i)}_{u(e_j)}) \tag{35}$$

$$= g_h^\star(\sum_{i=1}^{n} f_i^\star(u(e_j))v(f_i)) \tag{36}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f_i^\star(u(e_j))g_h^\star(v(f_i)) \tag{37}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f_i^\star(u(e_j))}_{a_{i,j}}\underbrace{g_h^\star(v(f_i))}_{b_{h,i}} \tag{38}$$

$$= (BA)_{h,j} \tag{39}$$

Proposition :
Pour $F = E$ et $\mathscr{C} = \mathscr{B}$, alors $Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(I_E) = I_n$

Démonstration : $\forall 1 \leq i,j \leq n$, on a $f_i^\star(I_E(e_j)) = e_i^\star(e_j) = \delta_{i,j}$

Cas particulier :

Théorème :
L'application définie par :

$L(E) \longrightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$
$u \longrightarrow Mat_{\mathscr{B}}(u) = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(u)$

est un isomorphisme d'algèbres associatives et unitaires.

Proposition :
$f \in L(E,F)$ est un isomorphisme
$\mathscr{B}$ une base de E
$\mathscr{C}$ une base de F

Si $Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = A$, alors A est inversible et $A^{-1} = Mat_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f^{-1})$

Démonstration : f un isomorphisme $\Longleftrightarrow$ dim E = dim F = n
Donc $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$

De plus, $f^{-1} \in L(F,E)$ donc $B = Mat_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f^{-1}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$

Or $AB = Mat_{\mathscr{C},\mathscr{C}}(fof^{-1}) = Mat_{\mathscr{C}}(I_F) = I_n$

et $BA = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f^{-1}of) = Mat_{\mathscr{B}}(I_E) = I_n$

Donc A est inversible et $A^{-1} = B$.

Proposition :
$f \in L(E, F)$

Si $A = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ est inversible, alors f est un isomorphisme et $A^{-1} = Mat_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f^{-1})$.

Démonstration : $A \in GL_n(\mathbb{R})$ donc il existe $B \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $AB = BA = I_n$.

Soit $g \in L(F, E)$, l'application linéaire telle que $B = Mat_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(g)$.

Alors $Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(gof) = BA = I_n = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(I_E)$

et $Mat_{\mathscr{C},\mathscr{C}}(fog) = AB = I_n = Mat_{\mathscr{C},\mathscr{C}}(I_F)$

donc $gof = I_E$ et $fog = I_F$.

Remarque importante :

Dans un anneau non commutatif $(R, +, \times)$,
a est inversible $\iff \exists b \in R$ tel que $ab = ba = 1_R$
Il y a donc deux propriétés à vérifier : $ab = 1_R$ et $ba = 1_R$.

Contre-exemple : $E = \mathbb{R}[X]$ et $(R, +, \times) = (L(E), +, o)$.
$\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $f(P) = XP$ avec $f \in R$.
Il existe $g \in R$ tel que $gof = I_E$: l'endormorphisme défini par $g(1) = 0$ et $\forall k \geq 1$, $g(X^k) = X^{k-1}$ convient.
En revanche, $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $deg(f(P)) \neq 0$,
donc f n'est pas bijective, et f n'est pas inversible : il n'existe pas de $g \in R$ tel que $fog = I_E$.

Mais dans l'anneau des matrices carrées $(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ les propriétés $AB = I_n$ et $BA = I_n$ sont équivalentes : il n'y a qu'une propriété à vérifier.

En effet : soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
On suppose qu'il existe $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = I_n$.
Soit E, un espace vectoriel de dimension n sur $mathbbK$, muni d'une base $\mathscr{B}$.
Alors il existe f et g dans $L(E)$ telles que $A = Mat_{\mathscr{B}}(f)$ et $B = Mat_{\mathscr{B}}(g)$.
Donc $I_n = Mat_{\mathscr{B}}(fog) = Mat_{\mathscr{B}}(I_E)$ donc $fog = I_E$. Donc f est surjective et g injective. D'après le théorème du rang, f et g sont bijectives, donc inversibles dans $L(E)$ et $g = f^{-1}$. Donc A et B sont inversibles dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = A^{-1}$.

Remarque : dans le contre exemple précédent, on était en dimension infinie, rendant impossible l'utilisation du théorème du rang.

Application linéaire canoniquement associée à une matrice :

Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Alors $f_A(X) = AX$ définit une application linéaire de $E = \mathfrak{m}_{n,1}(\mathbb{K})$ dans $F = \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned} f_A(\lambda X_1 + X_2) &= A(\lambda X_1 + X_2) && (40)\\ &= \lambda(AX_1) + (AX_2) && (41)\\ &= \lambda f_A(X_1) + f_A(X_2) && (42) \end{aligned}$$

De plus, $A = Mat_{\text{base canonique de E,bas canonique de F}}(f_A)$

En effet, $\underset{1 \leq j \leq p}{AE_{j,1}} = C_j$ et $AE_{j,1}$ est la j-ième colonne de $Mat_{can,can}(f_A)$.

Par abuse de notation, on écrira :
$Ker(A)$ pour $Ker(f_A) = \{X \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{K}) : AX = 0\}$
$Im(A)$ pour $Im(f_A) = \{Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}) : \exists X \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{K}), Y = AX\}$

3 Bases

3.1 Matrices de passage

Définition :
$\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E.
La matrice relative à $\mathscr{B}$ de la famille $(\epsilon_j)_{1 \leq j \leq p}$ de vecteurs de E est $(e_i^{\star}(\epsilon_j))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.

$*$ Si $X_j = Mat_{\mathscr{B}}(\epsilon_j)$.
Alors $Mat_{\mathscr{B}}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_p) = (X_1 \ X_2 \ \dots \ X_p)$

$*$ Si $f \in L(E)$ et si $\epsilon_j = f(e_j)$, alors $Mat_{\mathscr{B}}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_p) = Mat_{\mathscr{B}}(f)$

$$Mat_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_n \end{pmatrix}$$

Définition :
Soient $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $\mathscr{B}' = (\epsilon_j)_{1 \leq j \leq n}$, deux bases de E.
La matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est la matrice relative à $\mathscr{B}$ de la famille $\mathscr{B}'$.

$$Mat(\mathscr{B} \to \mathscr{B}') = \left(\begin{array}{c|ccc} & \epsilon_1 & \epsilon_2 & \epsilon_3 \\ \hline e_1 & & & \\ e_2 & & & \\ e_3 & & & \end{array}\right)$$

Exemple :

$\mathscr{B}$ base canonique de $\mathbb{R}^3$
$\epsilon_1 = (1, 2, 3)$
$\epsilon_2 = (-2, 3, 1)$
$\epsilon_3 = (2, 1, -1)$

$$Mat_{\mathscr{B}}(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Si la famille $\mathscr{B}' = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ est une base, alors on vient d'écrire la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$, l'endomorphisme caractérisé par $\forall 1 \leq i \leq 3,\ f(e_i) = \epsilon_i$.
Alors $Mat_{can}(f) = A$ et

$$\begin{aligned} \mathscr{B}' \text{ base} &\Longleftrightarrow (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) \text{ libre} \Longleftrightarrow f \text{ injective} && (43) \\ &\Longleftrightarrow (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) \text{ génératrice} \Longleftrightarrow f \text{ surjective} && (44) \\ &\Longleftrightarrow f \text{ isomorphisme} \Longleftrightarrow A \text{ inversible} && (45) \end{aligned}$$

La famille $\mathscr{B}'$ engendre E $\Longleftrightarrow$ e_1, e_2 et e_3 sont combinaisons linéaires de ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3.

$\begin{cases} x-2y+2z=1 \\ 2x+3y+z=0 \\ 3x+y-z=0 \end{cases}$ nous donne une unique solution :

$x=\frac{1}{7}$, $y=\frac{-5}{28}$ et $z=\frac{1}{4}$

On a donc $e_1 = \frac{1}{7}\epsilon_1 - \frac{5}{28}\epsilon_2 + \frac{1}{4}\epsilon_3$

De même, $\begin{cases} x-2y+2z=0 \\ 2x+3y+z=1 \\ 3x+y-z=0 \end{cases}$ nous donne $e_2 = \frac{1}{4}\epsilon_2 + \frac{1}{4}\epsilon_3$

Enfin, $\begin{cases} x-2y+2z=0 \\ 2x+3y+z=0 \\ 3x+y-z=1 \end{cases}$ nous donne $e_3 = \frac{2}{7}\epsilon_1 - \frac{3}{28}\epsilon_2 - \frac{1}{4}\epsilon_3$

Donc on a une famille génératrice et donc une base (raisonnement par dimensions). Donc la matrice précédente est la matrice de passage : $A = Mat(\mathscr{B} \to \mathscr{B}')$.

De plus,

$$Mat(\mathscr{B}' \to \mathscr{B}) = \frac{1}{28}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ -5 & 7 & -3 \\ 7 & 7 & -7 \end{pmatrix} = [Mat(\mathscr{B} \to \mathscr{B}')]^{-1}$$

En effet, f est un automorphisme et $\forall i,\ e_i = f^{-1}(\epsilon_i)$ donc $Mat(\mathscr{B}' \to \mathscr{B}) = Mat_{\mathscr{B}'}(f^{-1})$.

Quel est le résultat de $Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f) \times Mat_{\mathscr{B}',\mathscr{B}'}(f)$?

Par définition,

$$Mat(\mathscr{B} \to \mathscr{B}') = \left(\begin{array}{c:ccc} & \epsilon_1 & \epsilon_2 & \epsilon_3 \\ \hdashline e_1 & & & \\ e_2 & & & \\ e_3 & & & \end{array}\right) = Mat_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(I_{\mathbb{R}^3})$$

et $Mat(\mathscr{B}' \to \mathscr{B}) = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(I_{\mathbb{R}^3})$
Donc

$$\begin{aligned} Mat(\mathscr{B} \to \mathscr{B}') \times Mat(\mathscr{B}' \to \mathscr{B}) &= Mat_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(Id) \times Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(Id) && (46) \\ &= Mat_{\mathscr{B}'}(Id) && (47) \\ &= Id && (48) \end{aligned}$$

Définition :
Si $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ et $\mathscr{B}' = (e_j)_{1\leq j\leq n}$ sont deux bases de E, alors la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est :

$$Mat(\mathscr{B} \to \mathscr{B}') = Mat_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(I_E)$$

Proposition :
$Mat(\mathscr{B} \to \mathscr{B}')$ est inversible et son inverse est $Mat(\mathscr{B}' \to \mathscr{B})$

Démonstration :
$A = Mat_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(I_E)$ et $A^{-1} = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(I_E^{-1}) = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(I_E) = Mat(\mathscr{B}' \to \mathscr{B})$

$*$ Soit $(f_j)_{1\leq j\leq n}$, une famille de vecteurs de E.
Soit $A = Mat_{\mathscr{B}}(f_1, \dots, f_n)$.
Il existe un endomorphisme, unique, φ de E tel que $\forall 1 \leq j \leq n$, $\varphi(e_j) = f_j$.

$\varphi(\sum_{j=1}^n \alpha_j e_j) = \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j$ par linéarité de φ,

donc φ injective $\iff (f_j)_{1\leq j\leq n}$ libre.
$Im(\varphi) = Vect\{\varphi(e_j), 1 \leq j \leq n\} = Vect\{f_j, 1 \leq j \leq n\}$
donc φ surjective $\iff (f_j)_{1\leq j\leq n}$ génératrice.
et enfin φ est un automorphisme $\iff (f_j)_{1\leq j\leq n}$ est une base de E.

Dans ce cas, avec $\mathscr{B}' = (f_j)_{1\leq j\leq n}$, on a

$$Mat_{\mathscr{B}}(\varphi) = Mat(\mathscr{B} \to \mathscr{B}')$$
$$Mat_{\mathscr{B}'}(\varphi^{-1}) = Mat(\mathscr{B}' \to \mathscr{B})$$

$*$ Toute matrice inversible peut-être considérée comme une matrice de passage. En effet, si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, on se donne un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{K}$ et une base $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ de E. On note f, l'endomorphisme de E tel que $A = Mat_{\mathscr{B}}(f)$. Alors $A = Mat_{\mathscr{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n))$. Comme A est inversible, f est un automorphisme de E, donc la famille $(f(e_i))_{1\leq i\leq n}$ est une base $\mathscr{B}'$ de E et par définition : $A = Mat(\mathscr{B} \to \mathscr{B}')$.

3.2 Formules de chagement de base

$*$ <u>Sur les vecteurs</u>

$x \in E$
$X = Mat_{\mathscr{B}}(x)$ et $X' = Mat_{\mathscr{B}'}(x)$

$P = Mat(\mathscr{B} \to \mathscr{B}')$

$\to x = I_E(x)$ donc $Mat_{\mathscr{B}}(x) = Mat_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(I_E) \times Mat_{\mathscr{B}'}(x)$
Soit :

$$X = PX' \text{ ou } X' = P^{-1}X$$

> **Corollaire :**
> Si $A = Mat_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n)$ et que $A' = Mat_{\mathscr{B}'}(x_1, \dots, x_n)$ alors $A' = P^{-1}A$ puisque $(X'_1 \ \dots \ X'_n) = (P^{-1}X_1 \ \dots \ P^{-1}X_n)$

$*$ Sur les applications linéaires

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. Et $P = Mat(\mathscr{B} \to \mathscr{B}')$
Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux bases de F. Et $Q = Mat(\mathscr{C} \to \mathscr{C}')$
Soit $u \in L(E, F)$.
Soient $A = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ et $A' = Mat_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(u)$

On a $I_F o u o I_E = u$. Alors :

$Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = Mat_{\mathscr{C}',\mathscr{C}}(I_F) \times Mat_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(u) \times Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(I_E)$
Soit :

$$A = QA'P^{-1} \text{ ou } A' = Q^{-1}AP$$

Cas particulier : endomorphisme de E
$A = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(u)$ et $A' = Mat_{\mathscr{B}',\mathscr{B}'}(u)$
Donc $A' = P^{-1}AP$.

Cas particulier : formes linéaires sur E
$F = \mathbb{K}$ muni (toujours) de sa base canonique : 1
Donc $A' = AP$. (A et A' sont ici des matrices lignes).

Méthodes pour calculer A^{2007} :

* $A^{2007} = A \times \cdots \times A$ en 2006 multiplications.
* Exponentielle rapide en 18 multiplications.
* Changement de base :

On vérifie par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$.
S'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $A' = P^{-1}AP$ est très simple, alors il est facile

de calculer $(P^{-1}AP)^n$ et d'en déduire $A^n = P(P^{-1}AP)^n P^{-1}$.

Exemple :

$A = Mat_{\mathscr{B}}(u)$ et $u \in L(\mathbb{R}^3)$
Je suppose qu'il existe une base $\mathscr{B}' = \underbrace{(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)}_{\text{base de vecteurs propres}}$ telle que

$u(\epsilon_1) = \lambda_1 \epsilon_1$
$u(\epsilon_2) = \lambda_2 \epsilon_2$
$u(\epsilon_3) = \lambda_3 \epsilon_3$

Alors

$$A' = Mat_{\mathscr{B}'}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$\forall p \in \mathbb{N}$, on a :

$$(A')^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^p & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^p \end{pmatrix}$$

Donc

$$A^p = P \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^p & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^p \end{pmatrix} P^{-1}$$

où $P = Mat(\mathscr{B} \to \mathscr{B}')$

Remarque :

$A' = \lambda_1 E_{1,1} + \lambda_2 E_{2,2} + \lambda_3 E_{3,3}$
Je pose :
$A_1 = PE_{1,1}P^{-1}$
$A_2 = PE_{2,2}P^{-1}$
$A_3 = PE_{3,3}P^{-1}$
$A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3$
$A_1 A_1 = PE_{1,1}P^{-1} = A_1$ (projecteur)
$A_1 A_2 = PE_{1,1}E_{2,2}P^{-1} = 0$

Par récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}$, on a :

$$A^k = \lambda_1^k A_1 + \lambda_2^k A_2 + \lambda_3^k A_3$$

$\rightarrow$ On suppose qu'il existe un polynôme $\mu \in \mathbb{K}[X]$, non nul, tel que $\mu(A) = 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $R_k \in \mathbb{K}[X]$ tel que :
$deg(R_k) < deg(\mu)$ et $A^k = R_k(A)$:
$X^k = Q_k\mu + R_k$
$A^k = Q_k(A) \times \mu(A) + R_k(A)$

3.3 Relations d'équivalence

Définition :
Deux matrices A et B de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes lorsqu'il existe $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_p(\mathbb{K})$ tels que $B = Q^{-1}AP$.

Définition :
Deux matrices carrées A et B de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables lorsqu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $^B = P^{-1}AP$.

La réduction d'un endormorphisme consiste à trouver une matrice particulièrement simple dans la classe de similitude de A.

4 Rang d'une matrice

4.1 Matrices inversibles

$A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$
On suppose que l'algorithme du pivot permet de passer de A à I_n : il existe P et Q dans $GL_n(\mathbb{K})$ tels que $Q^{-1}AP = I_n$. Donc $A = QP^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$.

Réciproquement, si A est inversible, on suppose que l'algorithme du pivot sur les lignes seulement mène à :

$$\begin{pmatrix} I_k & \vdots & B_{k,n-k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & C_{n-k} \end{pmatrix}$$

Cette matrice représente un isomorphisme (elle est équivalente à A, le pivot sur les lignes a changé la base de l'espace d'arrivée). Par conséquent, la (k+1)-ème colonne est linéairement indépendante des k premières colonnes, donc la première colonne de C_{n-k} n'est pas nulle. A l'aide d'opérations sur les lignes on obtient donc :

$$\begin{pmatrix} I_{k+1} & \vdots & \star \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & \star \end{pmatrix}$$

D'après le principe de récurrence, on aboutit finalement à I_n. De la même manière, des opérations de pivot sur les colonnes exclusivement permettent d'aboutir à I_n.

<u>Application pratique</u> :

$$A' = \begin{pmatrix} & A & \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ & I_n & \end{pmatrix}$$

On effectue du pivot sur les colonnes exclusivement : il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que :

$$A'P = \begin{pmatrix} & AP & \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ & P & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & I_n & \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ & P & \end{pmatrix}$$

On connait ainsi l'inverse de A (=P) lorsqu'on arrive à I_n.
Cette technique démontre que A est inversible. La matrice A n'est pas inversible, si et seulement si, l'algorithme du pivot s'arrête avant d'obtenir I_n. Dans ce cas, P est de la forme :

$$\begin{pmatrix} & & & 0 & & 0 \\ Y_1 & \dots & Y_k & \vdots & \dots & \vdots \\ & & & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

Si $P = \begin{pmatrix} X_1 & \dots & X_k & X_{k+1} & \dots & X_n \end{pmatrix}$

Alors $AP = \begin{pmatrix} AX_1 & \dots & AX_n \end{pmatrix}$

Donc $\forall 1 \leq i \leq k$, on a $Y_i = AX_i$. Donc les Y_i forment une base de Im A.
Donc $\forall k+1 \leq j \leq n$, on a $AX_j = 0$. Donc les X_j forment une base de Ker A.

<u>Bilan</u> : l'algorithme du pivot sur les colonnes donne les informations suivantes :

→ Si A est inversible :
∗ prouve que A est inversible.
∗ donne l'inverse de A.

→ Si A n'est pas inversible :
∗ prouve que A n'est pas inversible.
∗ donne une base de l'image.
∗ donne une base du noyau.

<u>Exemple</u> : le rang et le noyau de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{cases} C_1 \leftarrow C_1 - 2C_4 \\ C_2 \leftarrow C_2 - 3C_4 \\ C_3 \leftarrow C_3 + C_4 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 5 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{cases} C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 + 3C_1 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -10 & 1 \end{pmatrix} \left\{ C_3 \leftarrow 3C_3 + 5C_2 \right.$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} \color{red}{1} & \color{red}{0} & \color{red}{0} & 0 \\ \color{red}{1} & \color{red}{-1} & \color{red}{0} & 0 \\ \color{red}{1} & \color{red}{1} & \color{red}{-3} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & -2 & \color{green}{-1} \\ 0 & 0 & 1 & \color{green}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \color{green}{3} \\ 1 & -2 & 1 & \color{green}{10} \end{pmatrix}$$

En rouge, une base de l'image.
En vert, un vecteur directeur du noyau.
Rang = dimension de l'image = 3.

4.2 Rang

Définition :
$A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: $A = (C_1 \ \ldots \ C_p)$ où les $C_j \in \mathfrak{n}, \mathfrak{1}(\mathbb{K})$.

$$rg(A) = dim(Vect(C_1, \ldots, C_p))$$

Propriété :
Si $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $rg(A) \leq n$ et $rg(A) \leq p$

Proposition :
$\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E.
$A = Mat_{\mathscr{B}}(u_j, 1 \leq j \leq p)$
Alors $rg(A) = rg(u_j, 1 \leq j \leq p)$

Démonstration : On sait que l'application :
$E \longrightarrow \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
$u \longrightarrow Mat_{\mathscr{B}}(u)$ est un isomorphisme.

Donc $dim(Vect(u_j, 1 \leq j \leq p)) = dim(Vect(Mat_{\mathscr{B}}(u_j), 1 \leq j \leq p)) = rg(A)$

Proposition :
$f \in L(E,F)$
$\forall \mathscr{B}$, base de E, et $\mathscr{C}$, base de F,

$$rg(f) = rg(Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f))$$

Démonstration : $\mathscr{B} = (e_j)_{1 \leq j \leq p}$

Par définition, $rg(f) = dim(Vect(f(e_j))_{1 \leq j \leq p}$
et $rg(Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)) = dim(Vect(Mat_{\mathscr{C}}(f(e_j)))_{1 \leq j \leq p}$

Corollaire :
$\forall A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall P \in GL_p(\mathbb{K})$, $\forall Q \in GL_n(\mathbb{K})$

$$rg(A) = rg(Q^{-1}AP)$$

Corollaire :
Les opérations de pivot conservent le rang

Corollaire :
$\forall A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\exists P \in GL_p(\mathbb{K})$, $\exists Q \in GL_n(\mathbb{K})$

$$Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} I_r & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \text{ et } rg(A) = r$$

Théorème :

$$\forall A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ rg({}^tA) = rg(A)$$

Démonstration : il existe P et Q tel que :

$$Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} I_r & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$({}^tP)^tA^t(Q^{-1}) = \begin{pmatrix} I_r & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

Or $({}^tP)^t(P^{-1} =^t (P^{-1}P) = I_n$
donc ${}^tP$ est inversible et $({}^tP)^{-1} =^t (P^{-1})$.
De même ${}^t(Q^{-1})$ est inversible, donc $r = rg({}^tA)$.