

# Ondes électromagnétiques dans le vide

## 1 Equation de propagation des champs

Puisque  $\rho = 0$  et  $\vec{j} = \vec{0}$ , les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

**Equation de propagation de  $\vec{E}$**

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

**Equation de propagation de  $\vec{B}$**

$$\Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

**Solution de l'équation d'Alembert scalaire à une dimension**

$$\Delta U = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

$$U(z, t) = f(z - vt) + g(z + vt)$$

où  $f$  et  $g$  sont deux fonctions quelconques deux fois dérivables.

La solution la plus générale de l'équation d'Alembert vectorielle à une dimension est, **dans un repère cartésien**, de la forme :

$$\vec{a}(z, t) = \begin{pmatrix} f_x(z - vt) + g_x(z + vt) \\ f_y(z - vt) + g_y(z + vt) \\ f_z(z - vt) + g_z(z + vt) \end{pmatrix}$$

où  $f_x, f_y, f_z, g_x, g_y,$  et  $g_z$  sont six fonctions quelconques deux fois dérivables.

La solution  $U(z, t) = f(z - vt)$  représente une propagation de la grandeur physique représentée par  $U$  à la vitesse  $v$ , dans le **sens positif** de l'axe  $Oz$ .

La solution  $U(z, t) = g(z + vt)$  représente une propagation de la grandeur physique représentée par  $U$  à la vitesse  $v$ , dans le **sens négatif** de l'axe  $Oz$ .

De tels champs sont appelés ondes progressives.

## 2 OPP dans le vide

On appelle onde plane une solution **non constante** de l'équation d'Alembert prenant des valeurs uniformes sur tous les plans perpendiculaires à une direction  $\vec{u}$

Une onde plane progressive (OPP) scalaire se propageant dans la direction  $\vec{u}$  est de la forme :

$$U(M, t) = f(\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM} - vt)$$

Une OPP vectorielle se propageant dans la direction  $\vec{u}$  est de la forme

$$\vec{a}(M, t) = \begin{pmatrix} f_x(\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM} - vt) \\ f_y(\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM} - vt) \\ f_z(\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM} - vt) \end{pmatrix}$$

Nous pouvons remplacer le terme  $\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM} - vt$  par  $t - \frac{\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM}}{v}$ . Par l'exemple l'OPP scalaire s'écrit aussi sous la forme :

$$U(M, t) = F\left(t - \frac{\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM}}{v}\right)$$

La structure de l'OPP électromagnétique dans le vide est la suivante :

- Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont perpendiculaires à la direction de propagation  $\vec{u}$ . On dit qu'ils sont *transversaux* et que l'onde est *transversale*. Ceci provient de la nullité de leur divergence.
- Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont perpendiculaires entre eux.
- Le trièdre  $(\vec{u}, \vec{E}, \vec{B})$  est direct.
- $\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$

Tout ceci est donné par les deux relations vectorielles dites relations de structure :

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{u} \wedge \vec{E} \quad \vec{E} = c \vec{B} \wedge \vec{u}$$

### 3 OPPM dans le vide

Dans tout ce qui suit, on a :  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$

Une OPPM scalaire de pulsation  $\omega$  est un champ scalaire de la forme :

$$U(M, t) = U_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi_0)$$

où  $U_0$  est une constante positive,  $\varphi_0$  une constante et  $\vec{k}$  est un vecteur constant appelé vecteur d'onde. L'argument du cosinus est appelé phase de l'onde.

Une OPPM vectorielle de pulsation  $\omega$  est un champ vectoriel de la forme :

$$\vec{a}(M, t) = \begin{pmatrix} a_{0x} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi_{0x}) \\ a_{0y} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi_{0y}) \\ a_{0z} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi_{0z}) \end{pmatrix}$$

où  $a_{0x}$ ,  $a_{0y}$  et  $a_{0z}$  sont des constantes positives,  $\varphi_{0x}$ ,  $\varphi_{0y}$  et  $\varphi_{0z}$  sont des constantes et  $\vec{k}$  un vecteur constant. Ses composantes sont des OPPM scalaires de même pulsation  $\omega$  et même vecteur d'onde  $\vec{k}$ .

Les résultats obtenus ci-après sont aussi bien valables pour les OPPM vectorielles que les OPPM scalaires.

L'OPPM se propage dans la direction du vecteur unitaire  $\vec{u} = \frac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|}$  à la vitesse :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k}$$

Cette vitesse est appelée *vitesse de phase*.

#### Description temporelle :

- pulsation  $\omega$
- fréquence  $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$
- période  $T = \frac{1}{\nu}$

#### Description spatiale :

- pulsation spatiale  $k$
- fréquence spatiale  $\sigma = \frac{k}{2\pi}$
- période spatiale  $\lambda = \frac{1}{\sigma}$

La pulsation spatiale  $k$  est appelée *module d'onde*; la période spatiale  $\lambda$  est appelée *longueur d'onde* et la fréquence spatiale  $\sigma$  est appelée *nombre d'onde*.

$$k = \frac{\omega}{v_\varphi} \quad \lambda = v_\varphi T = \frac{v_\varphi}{\nu}$$

La vitesse de phase  $v_\varphi$  des OPPM vérifiant l'équation d'Alembert est égale à la vitesse de propagation  $v$ .

Les OPPM scalaires et vectorielles peuvent être représentées par les champs complexes (la notation complexe est réservée aux OPPM) :

$$\underline{U}(M, t) = \underline{U}_0 \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad \text{avec} \quad \underline{U}_0 = U_0 \exp(i\varphi_0)$$

et

$$\underline{\vec{a}}(M, t) = \underline{\vec{a}}_0 \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

$$\underline{\vec{a}}_0 = \begin{pmatrix} a_{0x} \exp(i\varphi_{0x}) \\ a_{0y} \exp(i\varphi_{0y}) \\ a_{0z} \exp(i\varphi_{0z}) \end{pmatrix}$$

On retrouve les champs réels par les formules :

$$U(M, t) = \Re(\underline{U}(M, t)) \quad \vec{a}(M, t) = \Re(\underline{\vec{a}}(M, t))$$

En notation complexe, l'opérateur  $\frac{\partial}{\partial t}$  est une simple multiplication par  $-i\omega$ .

$$\overrightarrow{\text{grad}} \underline{U} = i\underline{U}\vec{k}$$

$$\Delta \underline{U} = -k^2 \underline{U}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \underline{\vec{a}} = i\vec{k} \wedge \underline{\vec{a}}$$

$$\text{div} \underline{\vec{a}} = i\vec{k} \cdot \underline{\vec{a}}$$

$$\Delta \underline{\vec{a}} = -k^2 \underline{\vec{a}}$$

**Le vecteur symbolique "nabla" est égal à  $i\vec{k}$ .**

Les équations de Maxwell pour les champs complexes s'écrivent :

$$(MG) : \quad i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$

$$(M\Phi) : \quad i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$$

$$(MF) : \quad i\vec{k} \wedge \vec{E} = i\omega \vec{B}$$

$$(MA) : \quad i\vec{k} \wedge \vec{B} = -i\omega \epsilon_0 \mu_0 \vec{E}$$

Pour une OPPM électromagnétique se propageant dans le vide, le module d'onde (pulsation spatiale) et la pulsation temporelle sont liées par les relations équivalentes suivantes :

$$k = \frac{\omega}{c} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = cT$$

C'est la *relation de dispersion du vide*.

Les équations de Maxwell complexes donnent également :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \quad \vec{E} = -\frac{c^2}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{B}$$

Différents domaines des ondes électromagnétiques :  
rayons gamma : longueur d'onde inférieure à  $10^{12}m$   
rayons X : entre  $10^{-9}$  et  $10^{-12}$   
rayons ultraviolets : entre  $10^{-7}$  et  $10^{-9}$   
domaine visible : entre  $10^{-6}$  et  $10^{-7}$   
rayons infrarouges : entre  $10^{-3}$  et  $10^{-6}$   
domaine hertzien : longueur d'onde supérieure à  $10^{-3}m$

Considérons une OPPM électromagnétique se propageant dans le sens des z croissants. Son vecteur d'onde est  $k = k\vec{u}_z = \frac{\omega}{c}\vec{u}_z$ . Son champ électrique est transverse, donc sa coordonnée selon  $\vec{u}_z$  est nulle. Il s'écrit de la manière la plus générale sous la forme :

$$\vec{E} = E_{0x} \cos(\omega t - kz)\vec{u}_x + E_{0y} \cos(\omega t - kz - \varphi)\vec{u}_y$$

La représentation complexe de ce champ est :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 \exp(kz - \omega t)$$

$$\underline{\vec{E}}_0 = E_{0x}\vec{u}_x + E_{0y} \exp(i\varphi)\vec{u}_y$$

Nous allons étudier la courbe décrite par l'extrémité du vecteur  $\vec{E}$  dans un plan d'onde orienté **de telle sorte que l'observateur voie arriver l'onde vers lui**.

$\varphi = 0$  rectiligne, première bissectrice  
 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$  elliptique gauche  
 $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$  elliptique gauche  
 $\varphi = \pi$  rectiligne, deuxième bissectrice  
 $\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$  elliptique droite  
 $\frac{3\pi}{2} < \varphi < 2\pi$  elliptique droite  
 $\varphi = \frac{\pi}{2}$  circulaire gauche  
 $\varphi = \frac{3\pi}{2}$  circulaire droite

## 4 Etude énergétique des OPP électromagnétiques

La densité volumique d'énergie  $u_{em}$  est composée de la densité volumique d'énergie électrique :

$$u_{el} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$$

et de la densité volumique d'énergie magnétique :

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Or, pour une OPPM électromagnétique dans le vide,  $\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$ , donc :

$$u_m = \frac{E^2}{2\mu_0 c^2} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = u_{el}$$

Il y a équirépartition de l'énergie entre les deux formes, électrique et magnétique.

Le vecteur de Poynting s'écrit :

$$\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{E} \wedge \left( \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{\mu_0 c} \right) = \epsilon_0 c E^2 \vec{u}$$

Le vecteur de Poynting et la densité volumique d'énergie sont liés par la relation :

$$\vec{\Pi} = cu_{em} \vec{u}$$

Il n'est pas possible de calculer les valeurs instantanées des grandeurs quadratiques en représentation complexe. On regarde donc les valeurs moyennes.

$$\langle U(M, t)V(M, t) \rangle = \frac{1}{2} \Re(UV^*) = \frac{1}{2} \Re(\underline{U}_0 \underline{V}_0^*)$$

## 5 Polarisation de la lumière

La lumière naturelle n'est pas polarisée.

La vibration lumineuse est indépendante de la direction  $\vec{v}$  choisie.

Un polariseur transmet une onde polarisée rectilignement suivant une direction particulière de son plan appelée axe du polariseur ou direction de transmission privilégié du polariseur.

Loi de Malus :

$$\epsilon = \epsilon_0 \cos^2 \alpha$$

où  $\epsilon_0$  est l'éclairement de la lumière sortant du polariseur et  $\alpha$  l'angle entre les directions de transmission privilégiée de l'analyseur et du polariseur.

∴