Séries entières

1 Définitions

Définition d'une série entière :
Sit (a_n) une suite de nombres complexes, la **série entière** de la variable complexe z associée à la suite (a_n) est la série de fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ notée :

$$\sum a_n z^n$$

Lemme :
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et z_0 un nombre complexe non nul. Si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée, alors pour tout nombre complexe z, $a_n z^n = O(|\frac{z}{z_0}|^n)$

Théorème : lemme d'Abel
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et z_0 un nombre complexe non nul. Si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée, alors pour tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série numérique $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Définition du rayon de convergence :
Etant donné une série entière $\sum a_n z^n$, on note A l'ensemble des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)$ soit bornée. On définit **le rayon de convergence R** de la série entière $\sum a_n z^n$ par :

$$R = \sup A = \sup\{r \in \mathbb{R}^+,\ (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}\ \textit{bornée}\}$$

Théorème :
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.
- Pour tout complexe z vérifiant $|z| < R$, la série numérique $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
- Pour tout complexe z vérifiant $|z| > R$, la série numérique $\sum a_n z^n$ est grossièrement divergente.

Théorème :
Soit $\sum a_n z^n$ une série de rayon de convergence R. Alors :

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R}^+,\ (a_n r^n)\ \textit{converge vers}\ 0\}$$

Définition du disque de convergence :
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Dans le plan complexe, on appelle **disque de convergence** de la série entière le disque ouvert de centre O, de rayon R : $\{z \in \mathbb{C},\ |z| < R\}$

2 Calcul du rayon de convergence

Théorème :
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.
- Si la série numérique $\sum a_n z_0^n$ converge pour un certain z_0, le rayon de convergence R est tel que $|z_0| \leq R$
- Si la série numérique $\sum a_n z_1^n$ diverge pour un certain z_1, le rayon de convergence R est tel que $R \leq |z_1|$.

Règle d'Alembert pour les séries entières :
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière vérifiant les hypothèses suivantes :
- pour tout entier n, $a_n \neq 0$
- la suite $(|\frac{a_{n+1}}{a_n}|)$ tend vers un élément L de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$

Alors le rayon de convergence R de la série entière est :
⋆ $\frac{1}{L}$ si $L \in \mathbb{R}_+^*$
⋆ $+\infty$ si $L = 0$
⋆ 0 si $L = +\infty$

3 Opérations sur les séries entières

Théorème :
Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R et R'. On note p le rayon de convergence de la série entière $\sum (a_n+b_n)z^n$, somme de ces deux séries entières, alors :
- $p \geq \min(R, R')$
- pour tout z tel que $z < \min(R, R')$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

- si $R \neq R'$, alors $p = \min(R, R')$.

Produit de Cauchy :
Le produit de Cauchy des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est la série entière $\sum c_n z^n$ avec

$$c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$$

Théorème :
Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R et R'. Notons $\sum c_n z^n$ la série entière produit de Cauchy de ces deux séries et R" son rayon de convergence, alors :

- pour tout nombre complexe z tel que $|z| < \min(R, R')$, les trois séries numériques $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$ et $\sum c_n z^n$ sont absolument convergentes. De plus :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = (\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n)(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n)$$

- $R'' \geq \min(R, R')$

4 Continuité sur le disque de convergence

Théorème :
La série entière $\sum a_n z^n$ est normalement convergente sur tout compact contenu dans son disque ouvert de convergence.

Théorème :
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. La fonction somme de cette série entière est continue sur le disque ouvert de convergence $\{z \in \mathbb{C},\ |z| < R\}$

5 Primitive de la somme d'une série entière

Théorème :
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière réelle de rayon de convergence R strictement positif. Une primitive sur $]-R, R[$ de la fonction somme S de la série entière s'obtient en intégrant terme à terme la série entière :

$$\forall x \in]-R, R[, \qquad \int_0^x (\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

6 Dérivation de la somme d'une série entière

Théorème :
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R strictement positif. Sa fonction somme S est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[$. Pour tout entier $k \geq 1$, la dérivée k-ième de S sur $]-R,R[$ s'obtient en dérivant k fois terme à terme la série de fonctions :

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$$

Corollaire :
Soit f une fonction de $]-R,R[$ dans $\mathbb{C}$. Si, sur cet intervalle, la fonction f est la fonction somme d'une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à R, alors f est de classe $\mathbb{C}^\infty$ sur cet intervalle.

7 Fonctions développables en série entière

Une fonction f, définie sur un intervalle $]-r,r[$ (avec $r > 0$) est dite développable en série entière sur cet intervalle s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$, de rayon de convergence supérieur ou égal à r, telle que :

$$\forall x \in]-r,r[, \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Théorème :
Soit f une fonction développable en série entière sur $]-r,r[$. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur cet intervalle et les coefficients a_n de son développement sont uniques et déterminés par la formule :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

8 Développements classiques

Formule du binôme généralisée :
Pour tout réel α, la fonction $x \mapsto (+x)^\alpha$ est développable en série entière sur $]-1,1[$. Son développement est donné par :

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

Fonctions construites à partir de la fonction exponentielle et développables sur $\mathbb{R}$.

$$e^{tz} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n z^n}{n!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$ch\ x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$sh\ x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Fonctions construites à partir de séries géométriques et de la formule du binôme généralisée développables sur $]-1,1[$.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

$$\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-x^n}{n}$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1)^{n-1}x^n}{n}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$

$$Arctan\ x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$$

$$Arcsin\ x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$$

$$Argsh\ x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$